

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Estructura de la prueba: la prueba se compone de dos opciones "A" y "B", cada una de las cuales **consta de cinco preguntas** que, a su vez, comprenden varias cuestiones. Sólo se podrá contestar una de las dos opciones, desarrollando íntegramente su contenido. En el caso de mezclar preguntas de ambas opciones la prueba será calificada con 0 puntos.

Puntuación: la calificación máxima total será de 10 puntos, estando indicada en cada pregunta su puntuación parcial.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(2 puntos) Estudiar y determinar la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Ejercicio 2

(2 puntos) Estudiar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo según los diferentes valores del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3

(3 puntos) Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1} \quad \text{b) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{c) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Ejercicio 4

(2 puntos) Determinar si es invertible o no y, en caso afirmativo, hallar la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

(1 punto) Calcular el valor de la siguiente integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x + 3y + 2z = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + z = 0$ y $\pi_3 \equiv 4x - 5y - 3z = 0$.

Ejercicio 2

(2 puntos) Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3

Dada la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x & \text{si } x < 0 \\ e^x - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudiar su continuidad.
- b) (2 puntos) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Ejercicio 4

(1 punto) Hallar dos números positivos que sumen 42 y tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Ejercicio 5

(2 puntos) Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y GUIÓN DE RESPUESTAS

OPCIÓN A:

Ejercicio 1

Solución: Las rectas se cruzan.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 2

Solución: El sistema es compatible determinado para todos los valores de $a \neq 0, a \neq 1$. En esos casos la única solución del sistema homogéneo es la solución trivial $(0,0,0)$. Si $a = 0$ o si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones dependen de un único parámetro.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

Soluciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1} = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Solución: La matriz es invertible. La matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 5

Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx = e - 1$$

Planteamiento y razonamiento correcto: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

OPCIÓN B:**Ejercicio 1****Solución:**

Los tres planos se cortan en el origen de coordenadas formando un triedro.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 2

Solución: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

a) **Solución:** La función es continua en toda la recta real.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

b) **Solución:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Solución: Los números son **28** y **14**.

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 5

Solución: $x=0$ y $x=-1$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.